Technische Mechanik

1. Einleitung
2. Statik des starren Körpers
3. Statik von Systemen starrer Körper
    3.1 Gleichgewichtsbedingungen, das Erstarrungsprinzip
    3.2 Lager
        3.2.1 Lagerung in der Ebene
        3.2.2 Allgemeiner Fall
    3.3 Beispiele
        3.3.1 Dreigelenkbogen
        3.3 2 Sägebock

Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Leonhard Euler

* 15. April 1707 in Basel

† 18. September 1783 in Sankt Petersburg

„Befindet sich ein System von Körpern im Gleichgewicht, dann sind auch alle aus ihm herausgeschnittenen Teile im Gleichgewicht.

Die Wirkung der abgeschnittenen Teile ist durch die Schnittkräfte ersetzbar..“

(Foto: Wikipedia)

Gleichgewichtsbedingung, Erstarrungsprinzip

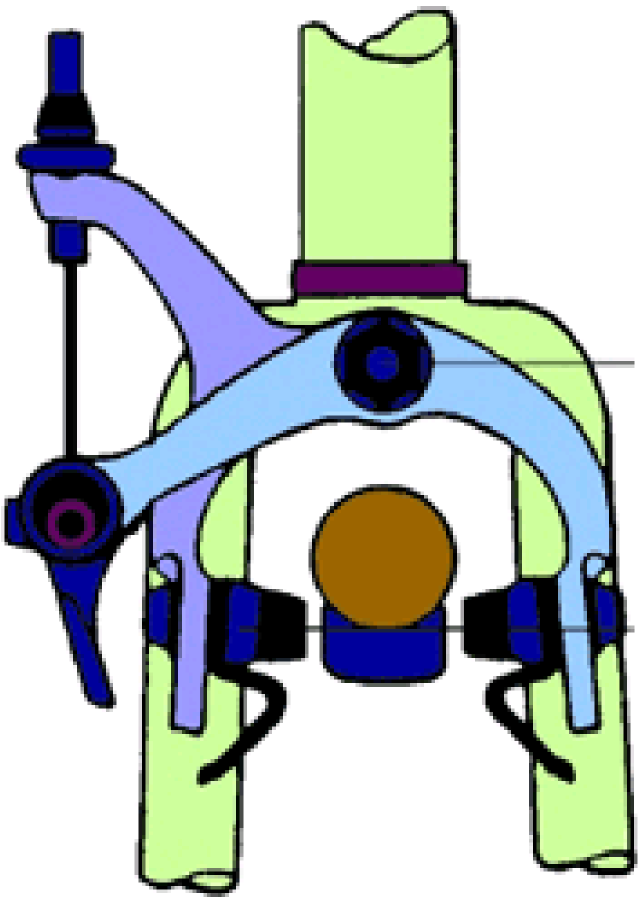
Gleichgewichtsbedingung:

- Ein System starrer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn *jeder einzelne starre Körper* im Gleichgewicht ist.

Erstarrungsprinzip:

- Ein System starrer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn *jedes Teilsystem* sich im Gleichgewicht befindet.

Beispiel: Fahrradbremse - Modellbildung



(Grafik: www.fahrradwelt.de)

Systemgrenze:
Das System besteht aus zwei starren Körpern.

Vereinfachung:
Wir betrachten nur die Kräfte in der x-y-Ebene und Momente um die z-Achse. Kräfte in z-Richtung und Momente um die x- oder y-Achse werden nicht berücksichtigt (Ebenes Ersatzmodell)

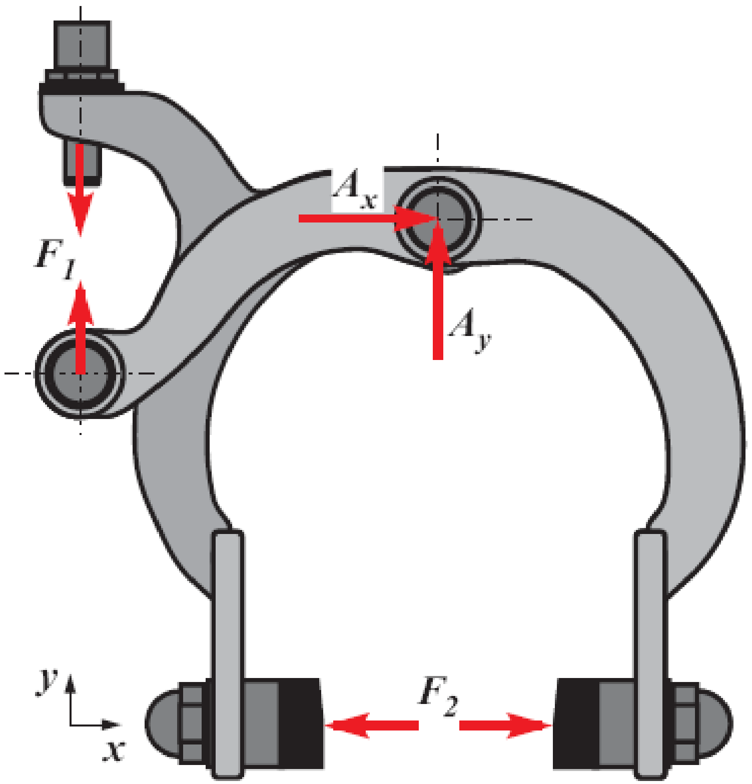
Gegeben:
Betätigungskraft, Geometrie

Gesucht:
Felgen-Normalkraft, Reaktionskräfte in den Lagern

Beispiel: Fahrradbremse

Das System besteht aus zwei starren Körpern.

Wir betrachten nur die Kräfte in der x-y-Ebene und Momente um die z-Achse. Kräfte in z-Richtung und Momente um die x- oder y-Achse werden nicht berücksichtigt (Ebenes Ersatzmodell).



- Teil II ist in Punkt A bzgl. Des Fahrradrahmens drehbar gelagert
- I ist in A bzgl. II drehbar gelagert

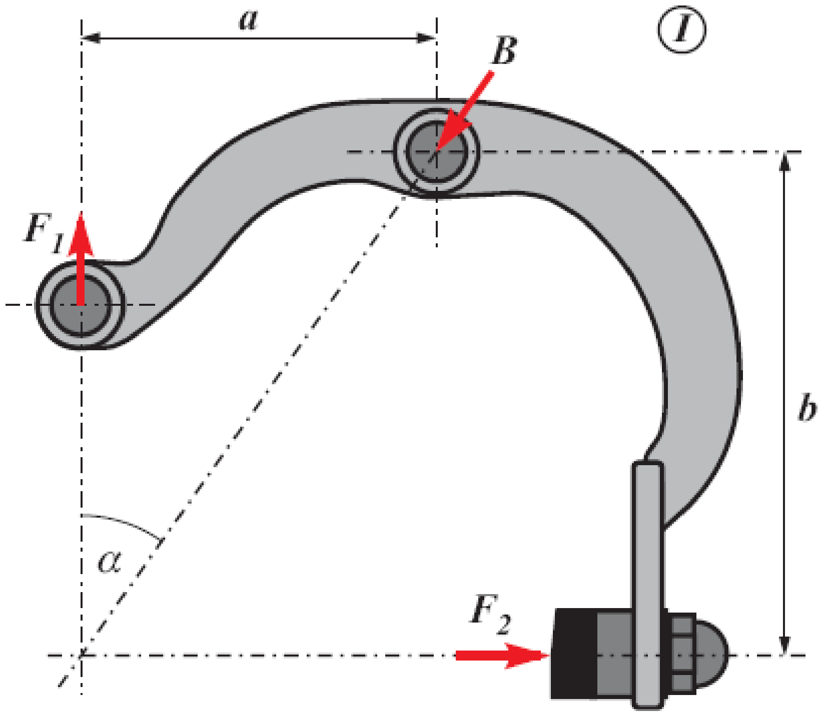
Als äussere Kräfte wirken

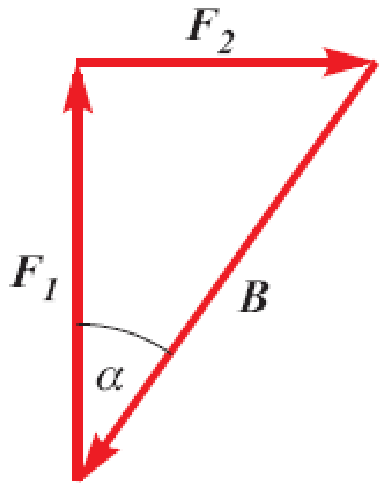
- Betätigungskraft F_1
- Felgen-Normalkraft F_2

Beispiel: Fahrradbremse

Das System ist im Gleichgewicht, wenn sowohl Körper I als auch Körper II im Gleichgewicht sind.

Körper I:





Richtung der Kräfte ergibt sich aus Dreieckskonstruktion, Größe (Betrag) aus:

$$F_1 = B\cos\alpha \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$F_2 = B\sin\alpha$$

Es folgt:

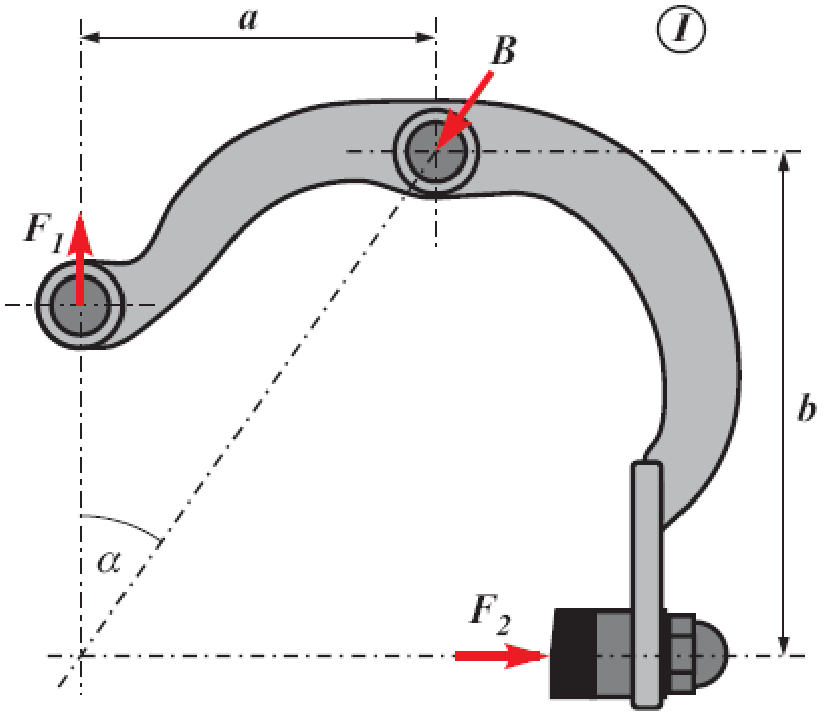
$$B = \frac{F_1}{\cos\alpha}$$

$$F_2 = F_1 \tan\alpha$$

Beispiel: Fahrradbremse

Das System ist im Gleichgewicht, wenn sowohl Körper I als auch Körper II im Gleichgewicht sind.

Körper I:



$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0: \quad F_2 - B\sin\alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0: \quad F_1 - B\cos\alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{(B)} = 0: \quad -F_1 a + F_2 b = 0$$

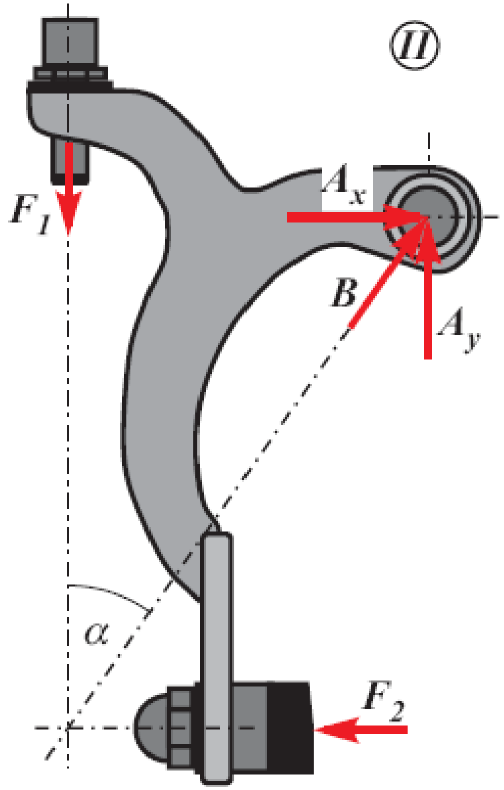
Zur Bestimmung der beiden unbekannten Kräfte ist es ausreichend 2 Gleichungen auszuwerten:

$$\begin{bmatrix} -\sin\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_1 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Fahrradbremse

Das System ist im Gleichgewicht, wenn sowohl Körper I als auch Körper II im Gleichgewicht sind.

Körper II:



Da die Kräfte F_1, F_2 und B am Körper I im Gleichgewicht stehen, ist ihre Resultierende gleich Null. Daraus folgt für Körper II, dass nur noch die beiden Kräfte A_x und A_y wirken. Diese müssen Null sein, damit Körper II im Gleichgewicht ist.

Technische Mechanik

1. Einleitung
2. Statik des starren Körpers
3. Statik von Systemen starrer Körper

    3.1 Gleichgewichtsbedingungen, das Erstarrungsprinzip

    3.2 Lager

        3.2.1 Lagerung in der Ebene

        3.2.2 Allgemeiner Fall

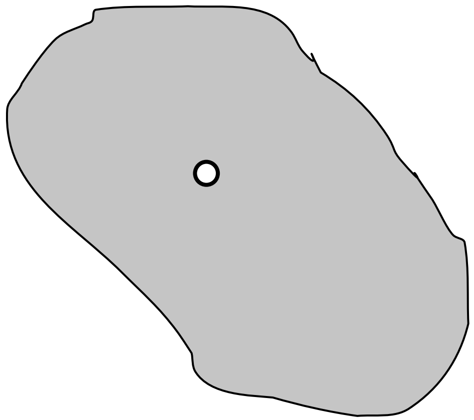
    3.3 Beispiele

        3.3.1 Dreigelenkbogen

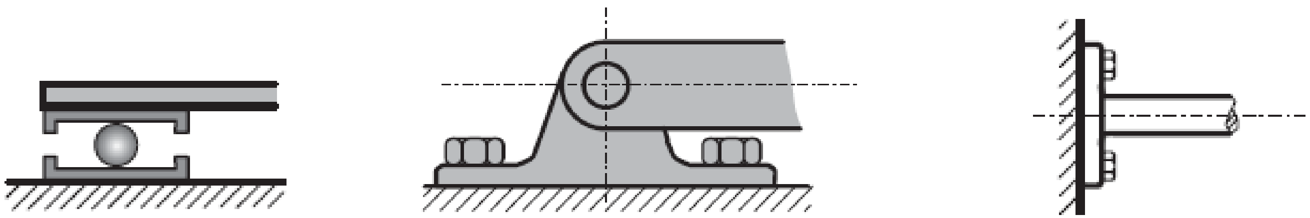
        3.3 2 Sägebock

Lager

- Ein starrer Körper hat in der Ebene drei unabhängige Bewegungsmoglichkeiten: zwei Translationen in der Ebene und eine Drehung um eine zur Ebene senkrechte Achse



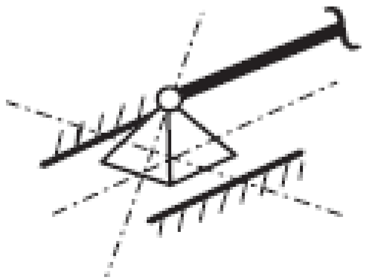
- Lager schränken die Bewegungsmöglichkeit ein.

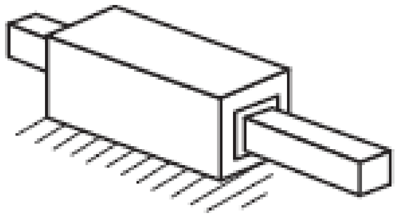


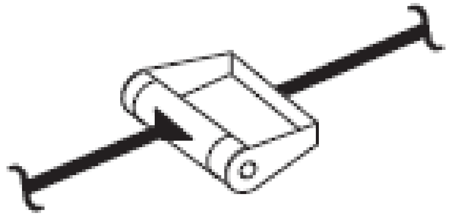
Lager

- Ein starrer Körper hat im Raum sechs unabhängige Bewegungsmoglichkeiten: drei Translationen und drei Drehungen

- Lager schränken die Bewegungsmöglichkeit ein.



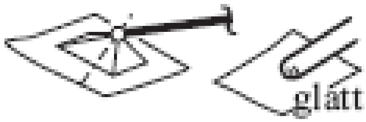
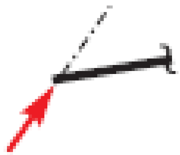
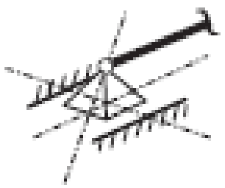
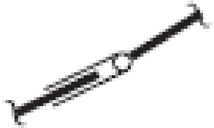
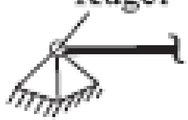
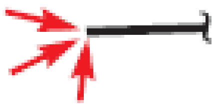
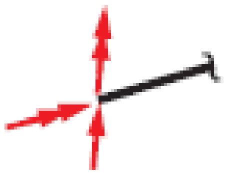
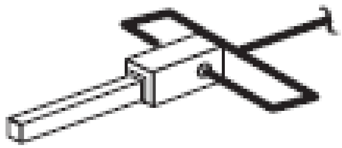




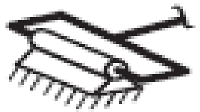
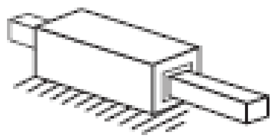
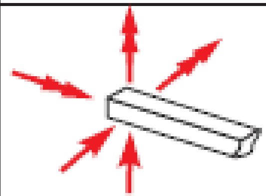
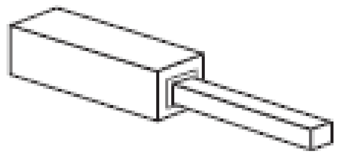
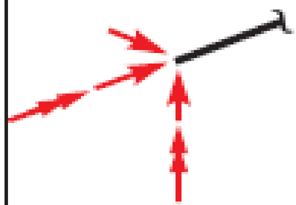
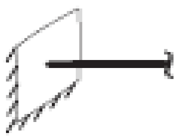
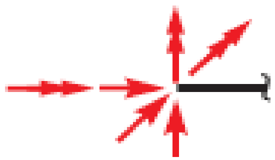
Lager in der Ebene

Anzahl			Beispiel technischer Ausführung	Auflager			Zwischenlager	
Kräfte	Momente	Reaktionen Σ		Name	Symbol	Reaktionen	Symbol	Reaktionen
0	0	0		freies Ende			nicht sinnvoll	
1	0	1	Seil oder Stab	Loslager (verschiebbares Gelenklager) Pendelstütze				
2	0	2		Festlager (festes Gelenklager)				
0	1	1	räumlich versetzt	Momentenstütze				
1	1	2		Schiebehülse			oder	
2	1	3		feste Einspannung				

Lager im Raum (1)

Anzahl F_i	Anzahl M_i	Anzahl Σ	Symbol als Lager	Auflager Reaktionen	Symbol als Zwischenlager
1	0	1	 glatt		
2	0	2			
3	0	3	Kugel 		 Kugel
1	2	3			

Lager im Raum (2)

Anzahl			Symbol als Lager	Auflager Reaktionen	Symbol als Zwischenlager
F_i	M_i	Σ			
2	2	4			
2	3	5			
3	2	5			 
3	3	6			

Beispiel: Gelenkarmroboter

(Foto: KUKA)

KUKA KR 1000 titan

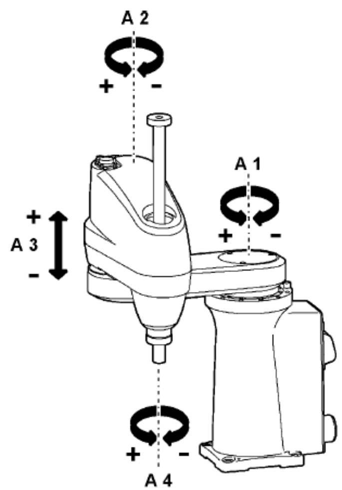
Traglast	1000 kg
Max. Reichweite	3202 mm
Anzahl der Achsen	6
Wiederholgenauigkeit	$< \pm 0{,}2$ mm
Gewicht	4700 kg

Beispiel: Scara-Roboter

(Foto: KUKA)

KUKA KR 5 Scara R550

Traglast	5 kg
z-Hub	200 mm / 320 mm
Max. Reichweite	550 mm
Anzahl der Achsen	4
Wiederholgenauigkeit	$< \pm 0{,}02$ mm
Gewicht	20 kg
Geschwindigkeit	max. 7,1 m/s

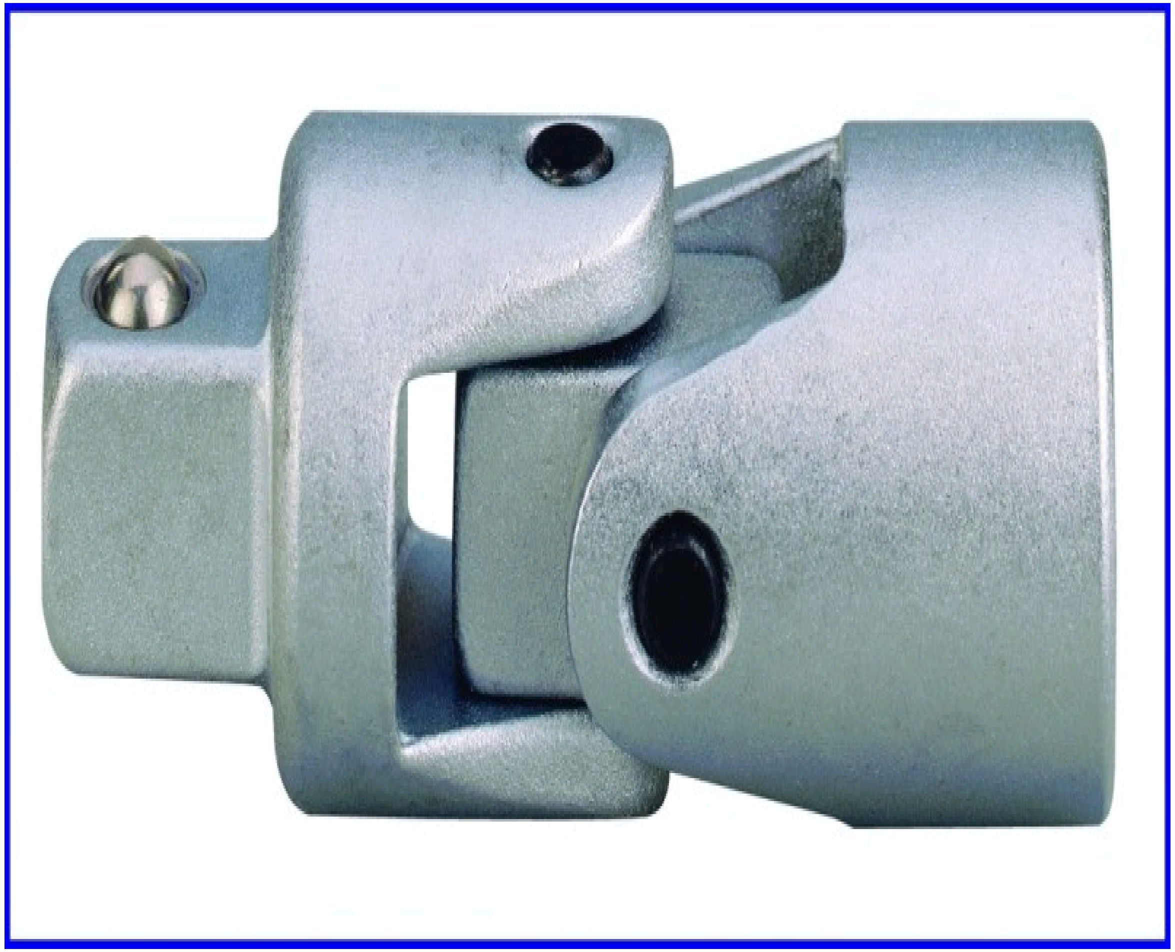


Beispiel: Fahrradbremse

(Foto: www.cycle-basar.de)

Shimano Deore XT, BR-M760

Beispiel: Kardangelenk

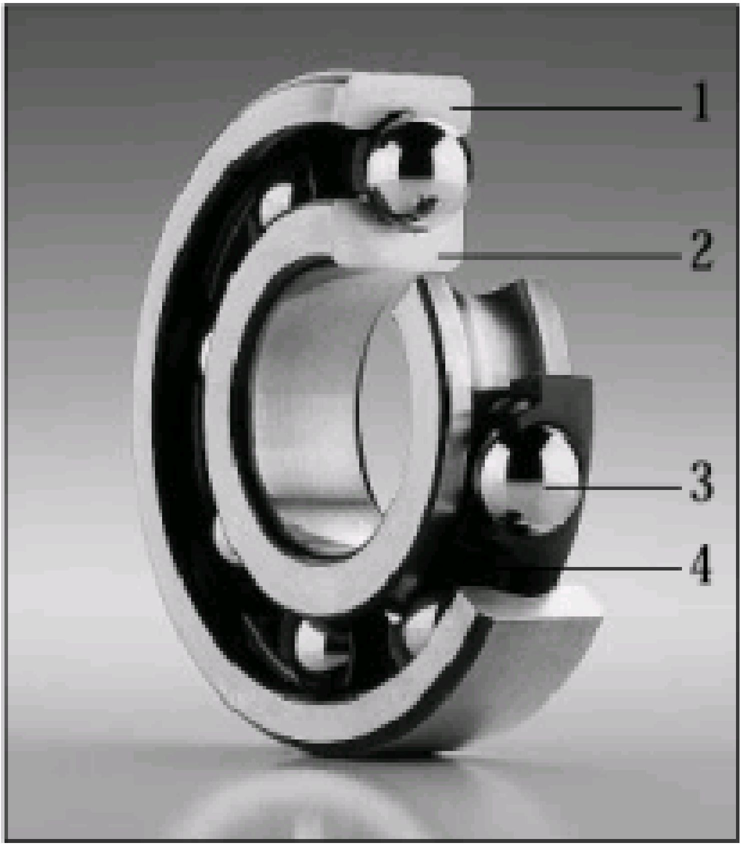


(Foto: www.wobestellen.de)

Beispiel: Gleitlager

(Foto: www.bf-vln.de)

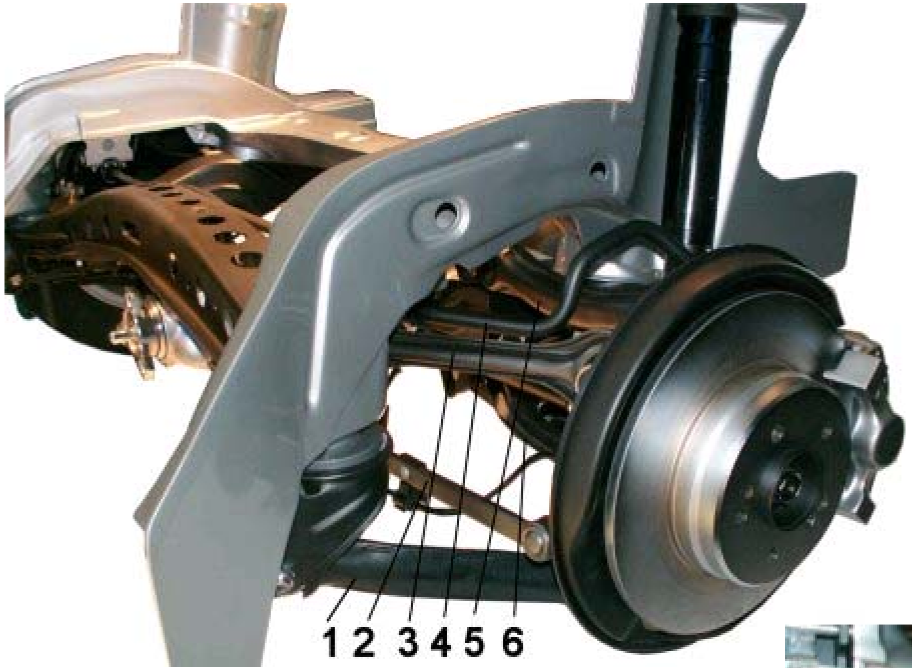
Beispiel: Wälzlager



1 Außenring, 2 Innenring, 3 Rollkörper, 4 Käfig

(Foto: www.bf-vln.de)

Beispiel: Fahrwerk



(Fotos: www.kfz-tech.de)

Technische Mechanik

1. Einleitung
2. Statik des starren Körpers
3. Statik von Systemen starrer Körper

    3.1 Gleichgewichtsbedingungen, das Erstarrungsprinzip

    3.2 Lager

        3.2.1 Lagerung in der Ebene

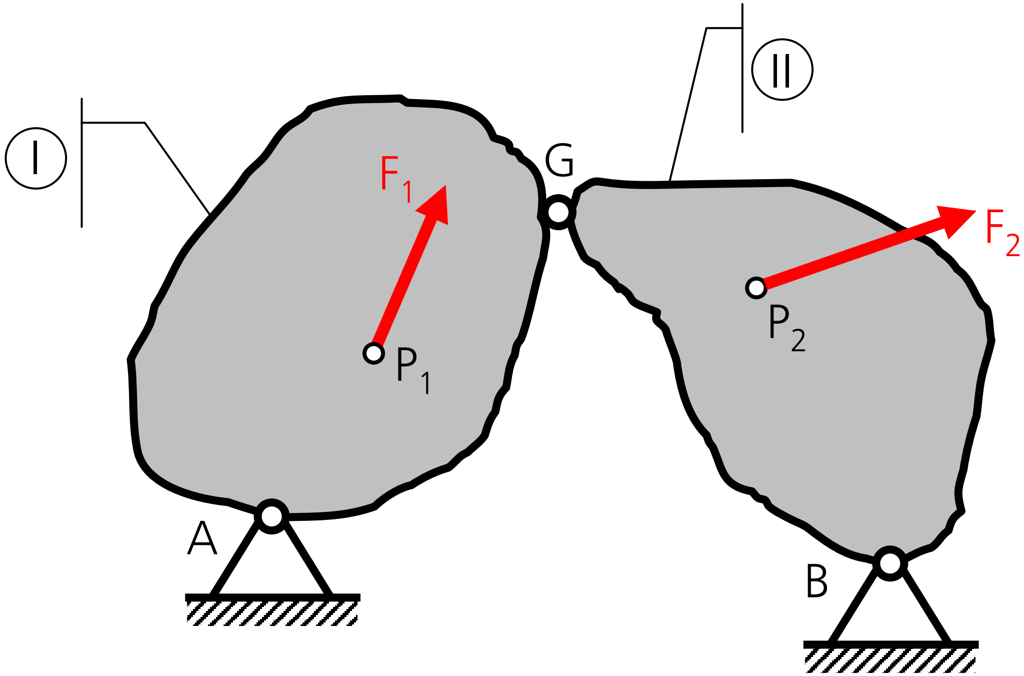
        3.2.2 Allgemeiner Fall

    3.3 Beispiele

        3.3.1 Dreigelenkbogen

        3.3 2 Sägebock

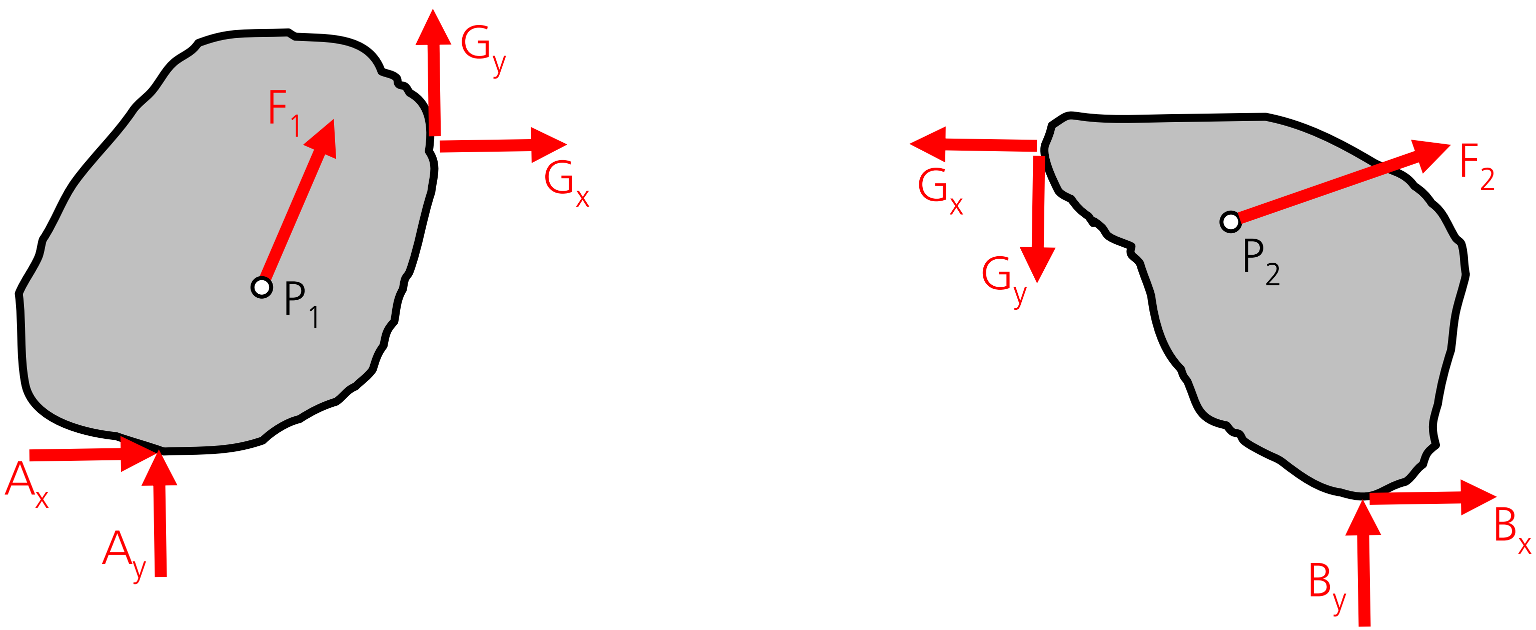
Beispiel: Dreigelenkbogen (1)



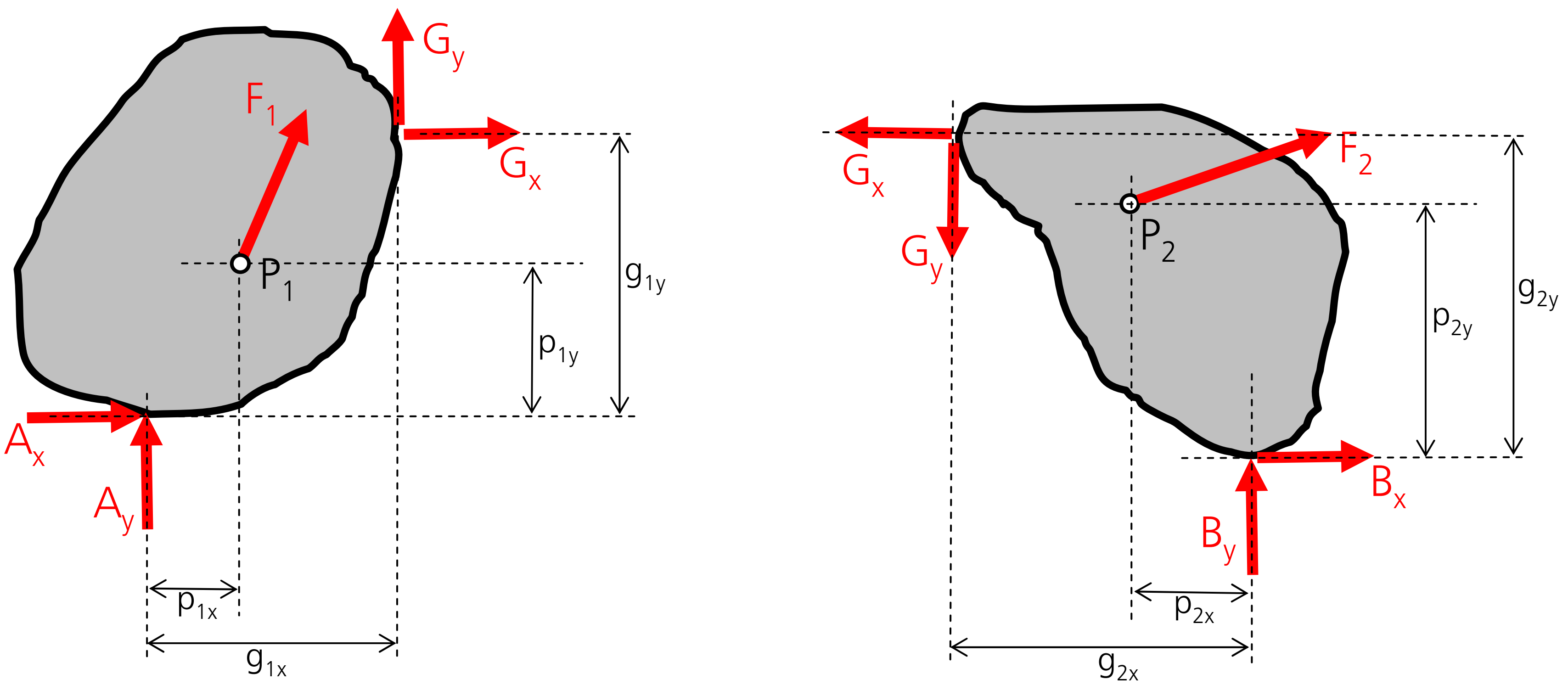
Gegeben: Geometrie, äußere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

Gesucht: Lagerkräfte $\vec{A}, \vec{B}$

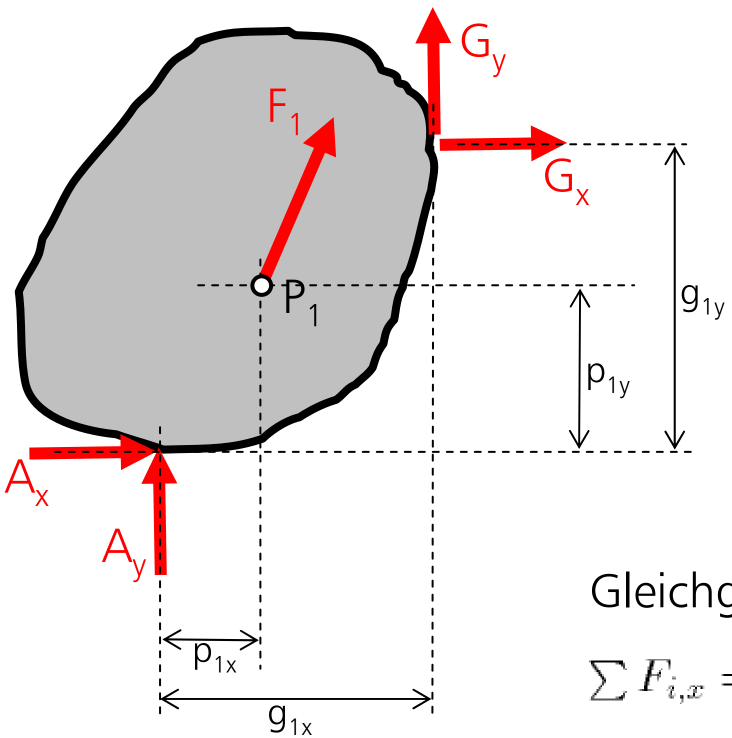
Beispiel: Dreigelenkbogen (2)

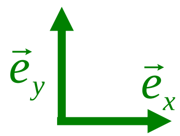


Beispiel: Dreigelenkbogen (3)



Beispiel: Dreigelenkbogen (4)





Stelle $\vec{F}_1$ durch Komponenten dar:

$$\vec{F}_1 = F_{1,x}\vec{e}_x + F_{1,y}\vec{e}_y$$

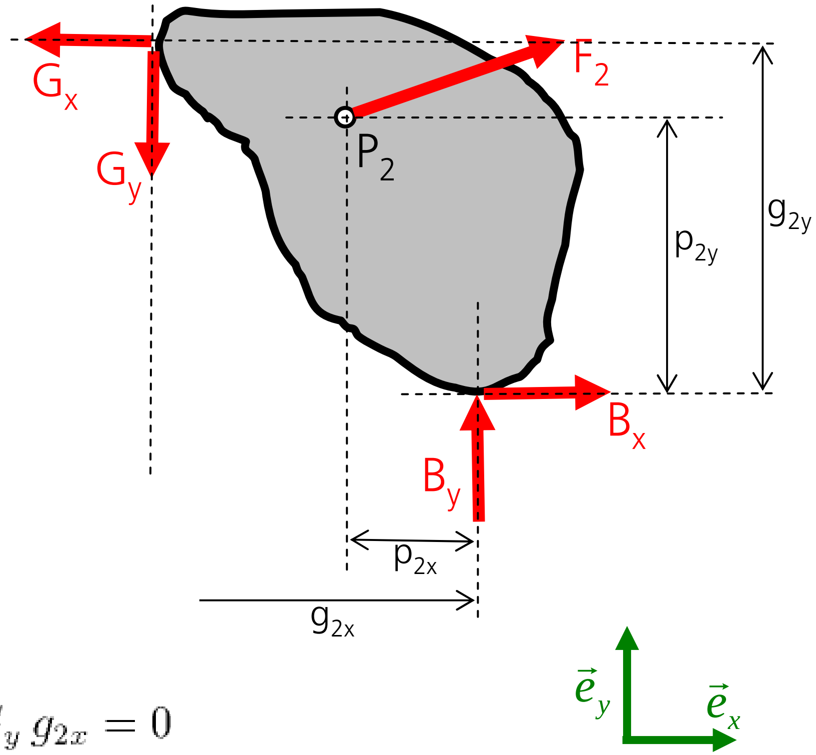
Gleichgewichtsbedingungen für Körper I:

$$\sum F_{i,x} = 0: \quad A_x + F_{1,x} + G_x = 0$$

$$\sum F_{i,y} = 0: \quad A_y + F_{1,y} + G_y = 0$$

$$\sum M_i^{(A)} = 0: \quad F_{1,x}\,p_{1y} - F_{1,y}\,p_{1x} + G_x\,g_{1y} - G_y\,g_{1x} = 0$$

Beispiel: Dreigelenkbogen (5)



Gleichgewichtsbedingungen für Körper II:

$$\sum F_{i,x} = 0: \quad B_x + F_{2,x} - G_x = 0$$

$$\sum F_{i,y} = 0: \quad B_y + F_{2,y} - G_y = 0$$

$$\sum M_i^{(B)} = 0: \quad F_{2,x}\, p_{2y} - F_{2,y}\, p_{2x} - G_x\, g_{2y} - G_y\, g_{2x} = 0$$

Beispiel Dreigelenkbogen (6)

Gleichgewichtsbedingungen ergeben lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1y} & g_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_{2y} & -g_{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{1,x} \\ -F_{1,y} \\ -F_{1,x}p_{1y} + F_{1,y}p_{1x} \\ -F_{2,x} \\ -F_{2,y} \\ -F_{2,x}p_{2y} - F_{2,y}p_{2x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\vec{R} = \vec{F}$$

Vektor der (gegebenen) äußeren Kräfte

Vektor der (gesuchten) Reaktionskräfte

Systemmatrix

Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Beispiel: Sägebock (1)

Gegeben:

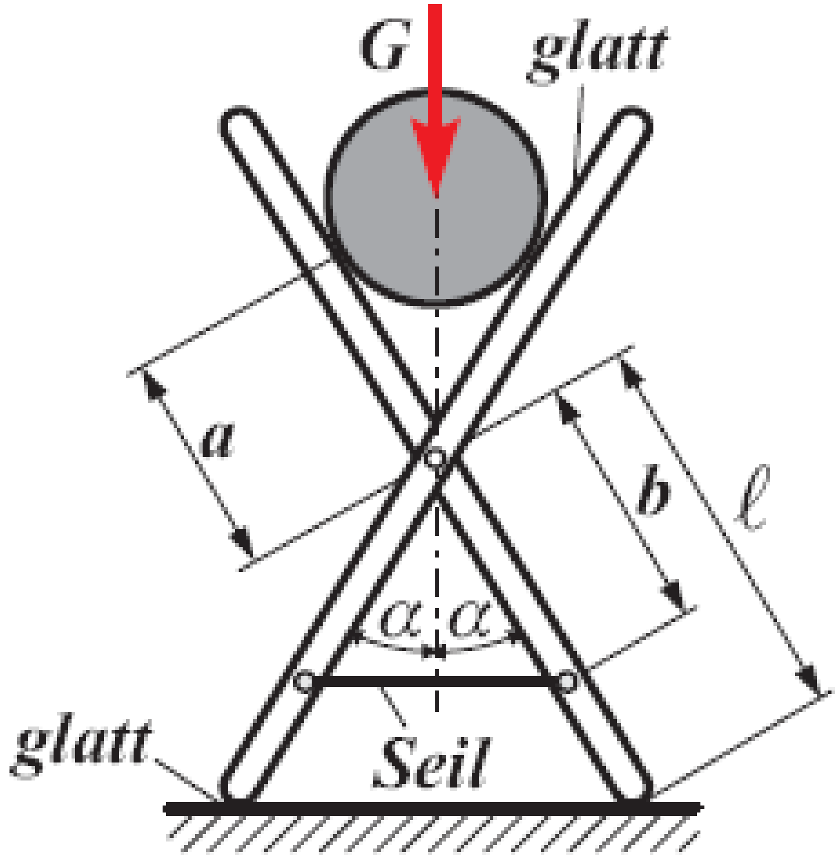
Geometrie, äussere Kraft G

Gesucht:

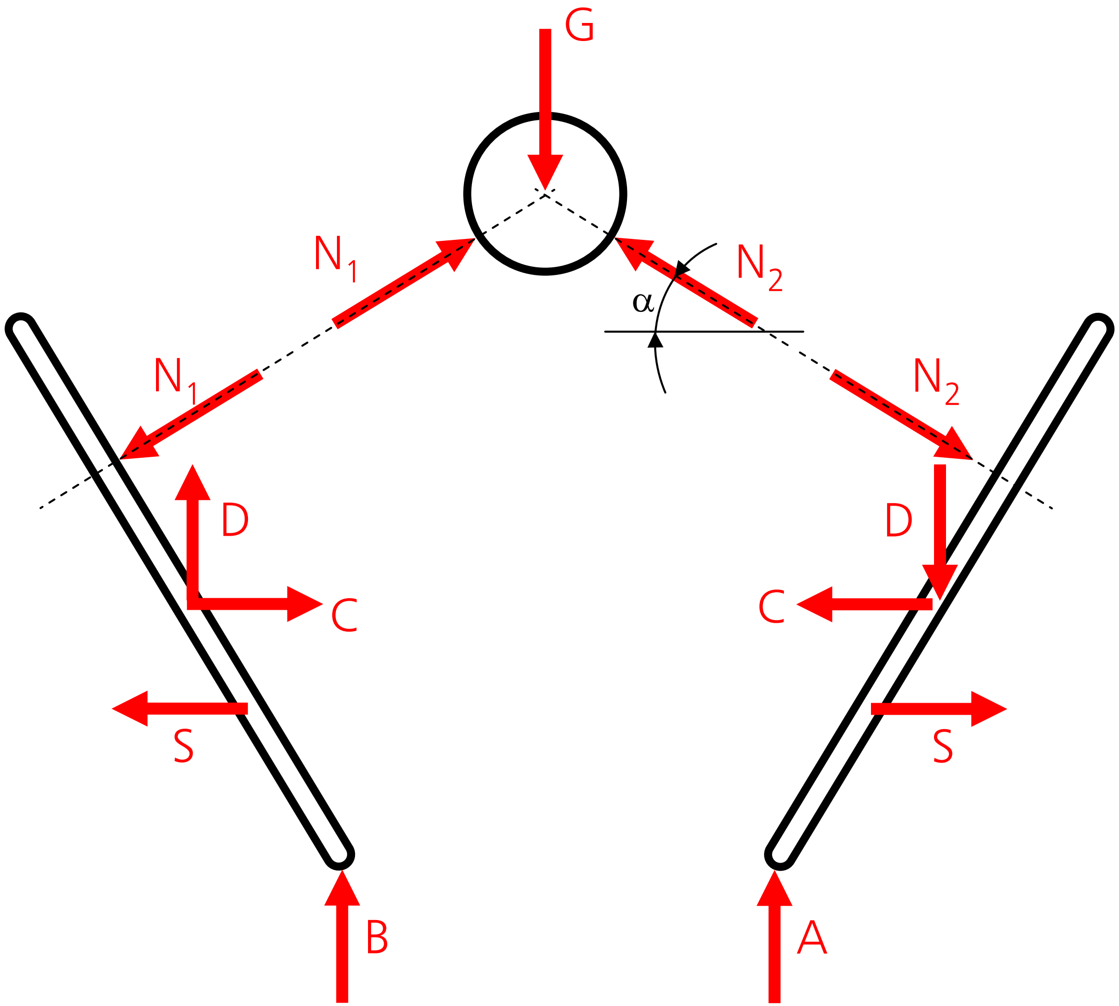
Alle Reaktionskräfte

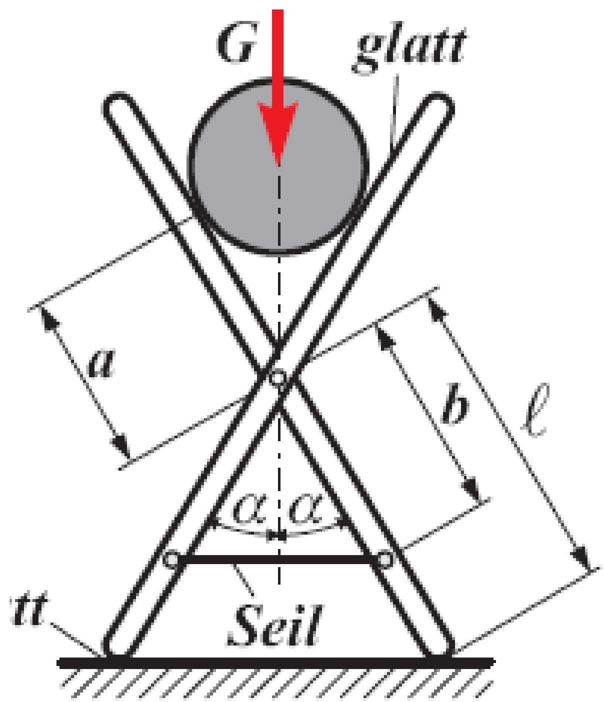
Vorgehen:

- Freischneiden der Körper,
- Eintragen aller Schnittkräfte,
- Aufstellen der Gleichgewichts-bedingungen
- Auflösen der Gleichungen nach den gesuchten Kräften



Beispiel: Sägebock (2)





Beispiel: Sägebock (3)

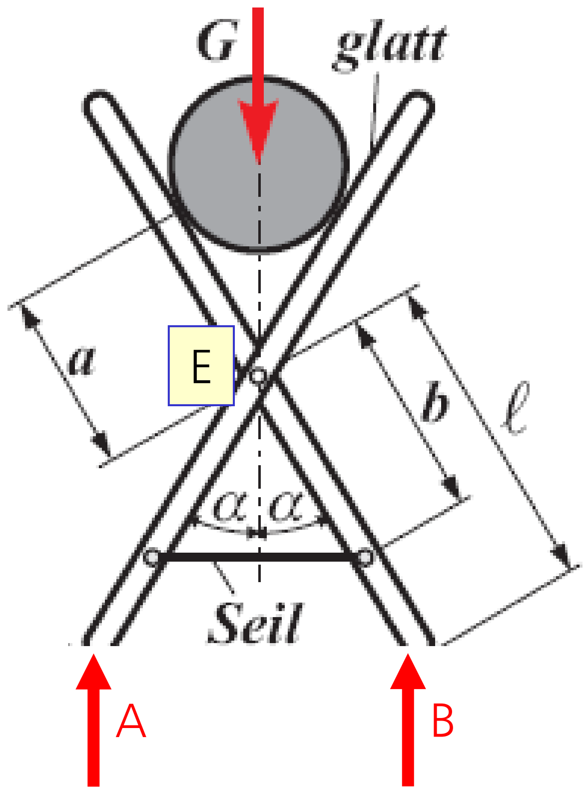
Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem:

$$\sum M_i^{(E)} = 0: \quad Bl\sin\alpha - Al\sin\alpha = 0$$

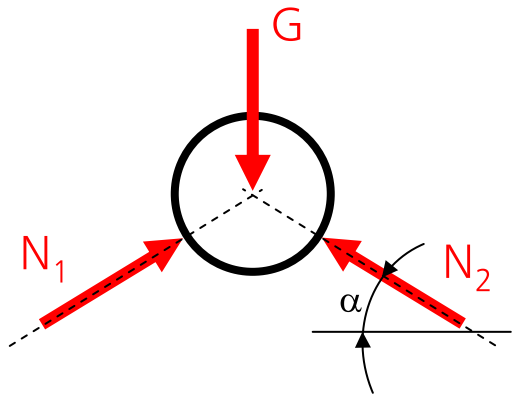
$$\sum F_{iy} = 0: \quad A + B - G = 0$$

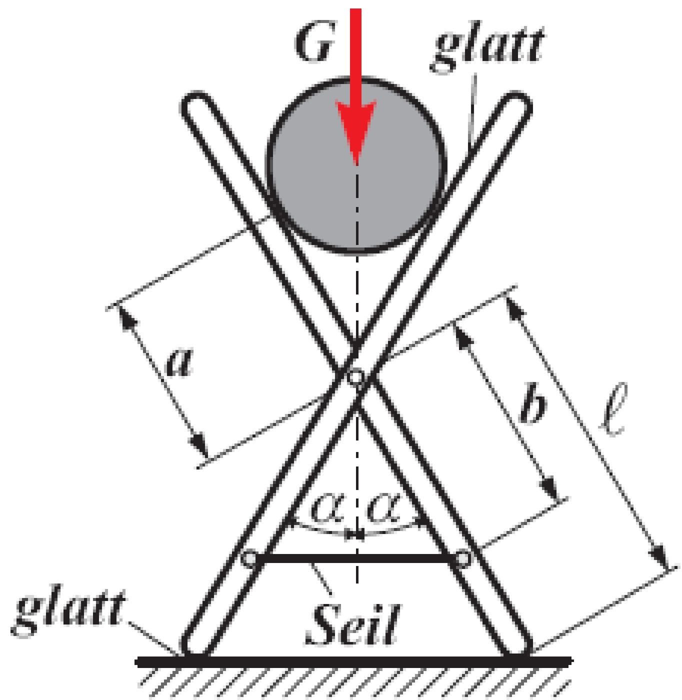
$$\Rightarrow \quad A = B$$

$$A = B = \frac{G}{2}$$



Beispiel: Sägebock (4)





Gleichgewichtsbedingungen für den Zylinder:

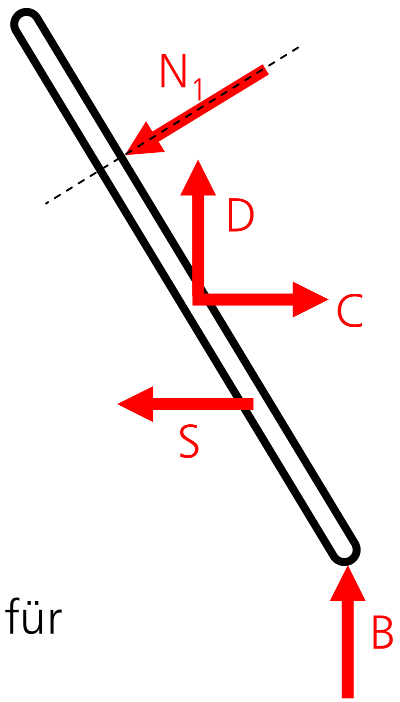
$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0$$

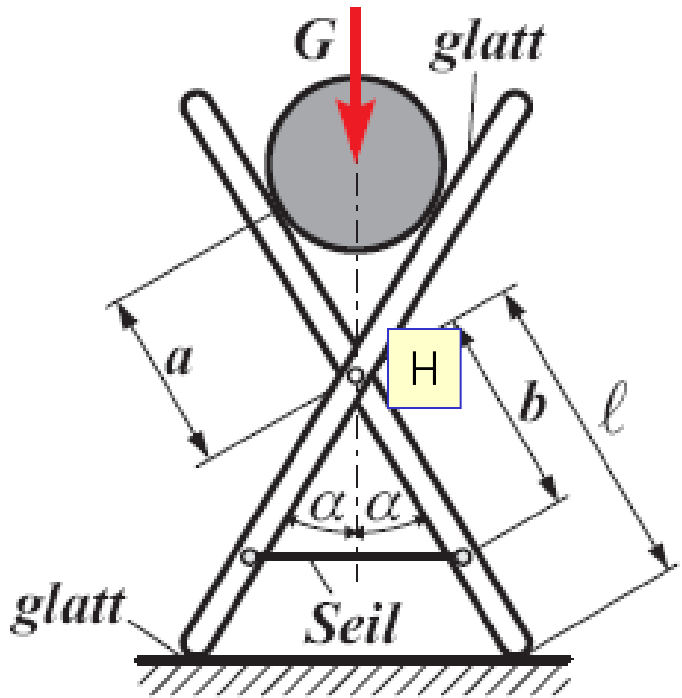
$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - G = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = N_2$$

$$N_1 = N_2 = \frac{G}{2\sin\alpha}$$

Beispiel: Sägebock (5)





Gleichgewichtsbedingungen für den rechten Holm:

$$\sum M_i^{(H)} = 0: \quad N_1 a - Sb\cos\alpha + Bl\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -S + C - N_1\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad B + D - N_1\sin\alpha = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$S = G\left[\frac{a}{2b\sin\alpha} + \frac{l}{2b}\tan\alpha\right]$$

$$C = G\left[\frac{a}{2b\sin\alpha} + \frac{l}{2b}\tan\alpha + \frac{1}{2\tan\alpha}\right]$$

$$D = 0$$

Zusammenfassung

- Ein System starrer Körpr ist im Gleichgewicht, wenn jeder Körper im Gleichgewicht ist.
- Ein System starrer Körper ist im Gleichgewicht, wenn jedes Teilsystem im Gleichgewicht ist.

- Lager schränken die Bewegungsmöglichkeiten ein.
- Die Wertigkeit eines Lagers ist durch die Anzahl der von ihm übertragenen Reaktionskräfte, bzw. –momente bestimmt. Sie gibt gleichzeitig an, wie viele Freiheitsgrade der Bewegung eingeschränkt werden.